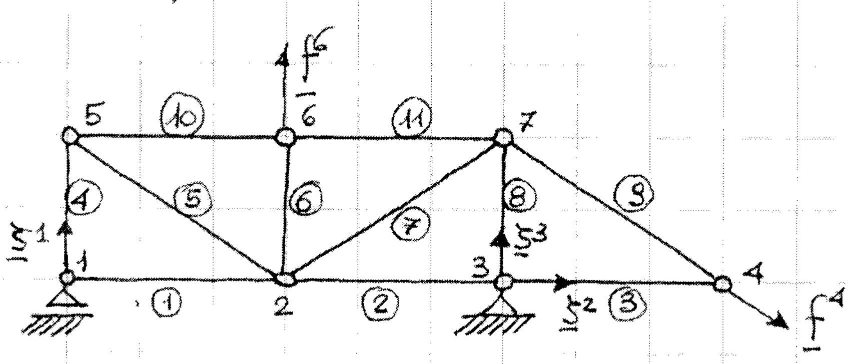
10. Travature reticolari

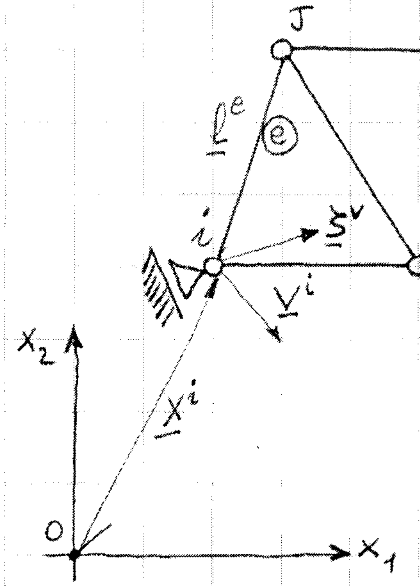
- Travi ad asse rettilineo connesse tra loro mediante cerniere in punti detti <u>nodi</u>;
- Vincoli esterni di traslazione applicati ai nodi;
- Forze applicate ai nodi (forze distribuite sulle travi nulle, coppie nulle).



La generica trave viene denominata <u>asta</u> e risulta sollecitata dalla sola <u>forza normale</u>. Infatti, essendo $f_r = 0$ dalla (6.6) il taglio è costante; considerato che $m(s) = 0$ dalla (6.1) il momento è lineare, ma agli estremi deve essere nullo per la presenza delle cerniere. L'unica possibilità è $T = M = 0$. Assumendo anche $f_s = 0$ segue dalla (6.3) che la forza normale nell'asta è costante.

- n = numero dei nodi
- m = numero dei vincoli semplici
- a = numero delle aste

- ## Analisi cinematica



Nodi n

posizione $\underline{x}^i = \{x_1^i \; x_2^i\}^T$

spostamento infinitesimo $\underline{v}^i = \{v_1^i \; v_2^i\}^T$

Aste a

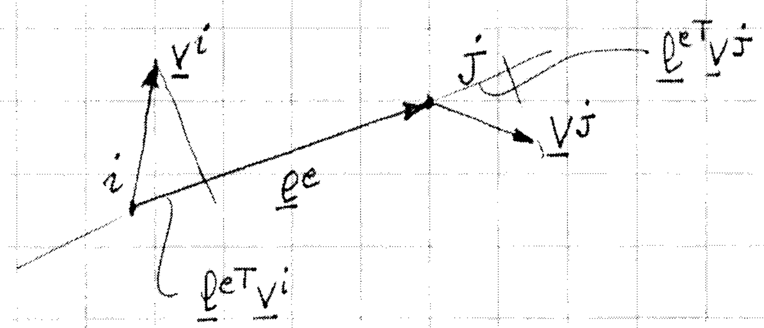
Vincoli semplici m

$\underline{\zeta}^v = \{\zeta_1^v \; \zeta_2^v\}^T$ direzione eff.

Verificare che i vincoli e le aste sono in numero e posizione tale da impedire atti di moto rigido della travatura, di porzioni e di singole aste. Attribuiti ad ogni nodo due gradi di libertà espressi come componenti di spostamento infinitesimo $\underline{v}^i = \{v_1^i \; v_2^i\}^T$ $(i = 1, n)$, si impongono le a equazioni di rigidità assiale delle aste e le m equazioni di vincolo semplice.

- Equazione di rigidità assiale dell'asta e $(i \to j)$

$$\underline{\ell}^e = \underline{x}^j - \underline{x}^i \quad \text{vettore dell'asta}$$



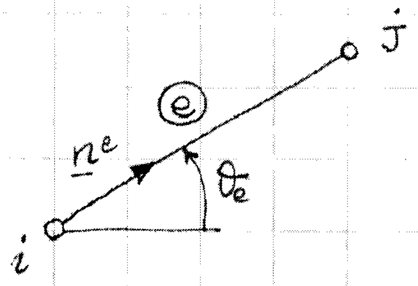
Gli spostamenti infinitesimi $\underline{v}^i$ e $\underline{v}^j$ devono essere tali da rendere la distanza $|\underline{\ell}^e| = \sqrt{\underline{\ell}^{eT}\underline{\ell}^e}$ invariata. A tal fine le proiezioni degli spostamenti sull'asse della trave devono essere eguali:

$$\underline{\ell}^{eT}\underline{v}^i = \underline{\ell}^{eT}\underline{v}^j \qquad (10.1)$$

da cui

$$\underline{\ell}^{eT}(\underline{v}^i - \underline{v}^j) = 0. \qquad (10.2)$$

Al vettore $\underline{\ell}^e$ si può sostituire il versore $\underline{n}^e = \underline{\ell}^e / |\underline{\ell}^e|$ di componenti $\underline{n}^e = \{\cos\vartheta_e \quad \sin\vartheta_e\}^T$ dove ϑ_e è l'angolo tra il segmento congiungente il nodo i al nodo j e l'asse x_1



L'equazione (10.2) diviene

$$(\underline{v}^i - \underline{v}^j)^T \underline{n}^e = (v_1^i - v_1^j)\cos\vartheta_e + (v_2^i - v_2^j)\sin\vartheta_e = 0; \qquad (10.3)$$

imponendo la condizione di rigidità estensionale alle aste si ottengono quindi a equazioni lineari omogenee.

- Equazione di vincolo semplice

La generica equazione di vincolo semplice si esprime:

$$\underline{\xi}^{vT}\underline{v}^i = 0 \qquad (10.4)$$

essendo v il vincolo semplice agente sul nodo i. In questo caso si ottengono m equazioni lineari omogenee.

Si ottiene così un sistema di $a+m$ equazioni lineari omogenee in $2n$ incognite: la discussione viene svolta in analogia agli altri problemi cinematici trattati.
Condizione necessaria affinchè il problema risulti determinato e la soluzione sia banale è che $a+m \geq 2n$.

<u>Esempio</u> $a=5, \; n=4, \; m=3$

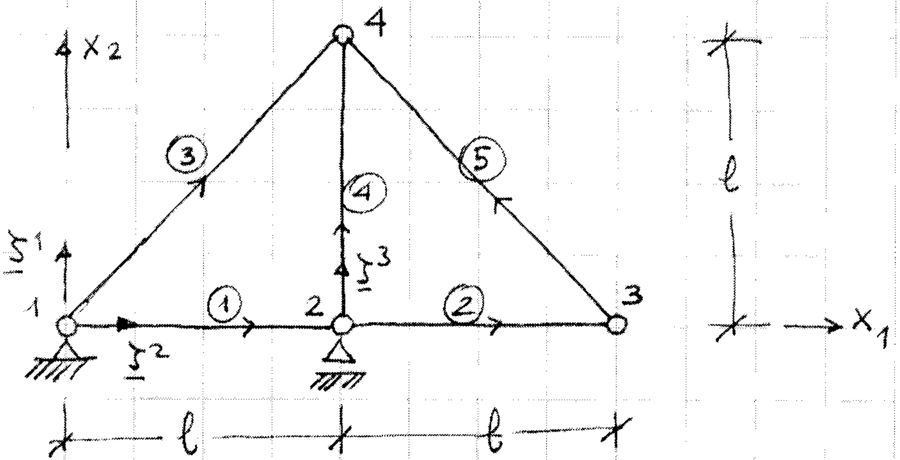
$\vartheta_1 = 0$

$\vartheta_2 = 0$

$\vartheta_3 = \pi/4$

$\vartheta_4 = \pi/2$

$\vartheta_5 = 3/4\,\pi$



$\underline{n}^1 = \{1 \;\; 0\}^T; \; \underline{n}^2 = \{1 \;\; 0\}^T; \; \underline{n}^3 = \{\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2}\}^T; \; \underline{n}^4 = \{0 \;\; 1\}^T;$

$\underline{n}^5 = \{-\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2}\}; \; \underline{\zeta}^1 = \{0 \;\; 1\}^T; \; \underline{\zeta}^2 = \{1 \;\; 0\}^T; \; \underline{\zeta}^3 = \{0 \;\; 1\}^T$

- Equazioni di rigidità delle aste

$e=1 \qquad V_1^1 - V_1^2 = 0$

$e=2 \qquad V_1^2 - V_1^3 = 0$

$e=3 \qquad (V_1^1 - V_1^4)\sqrt{2}/2 + (V_2^1 - V_2^4)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$e=4 \qquad V_2^2 - V_2^4 = 0$

$e=5 \qquad (V_1^3 - V_1^4)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (V_2^3 - V_2^4)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

- Equazioni di vincolo semplice

$v=1 \qquad V_2^1 = 0$

$v=2 \qquad V_1^1 = 0$

$v=3 \qquad V_2^2 = 0$

che possono in forma matriciale

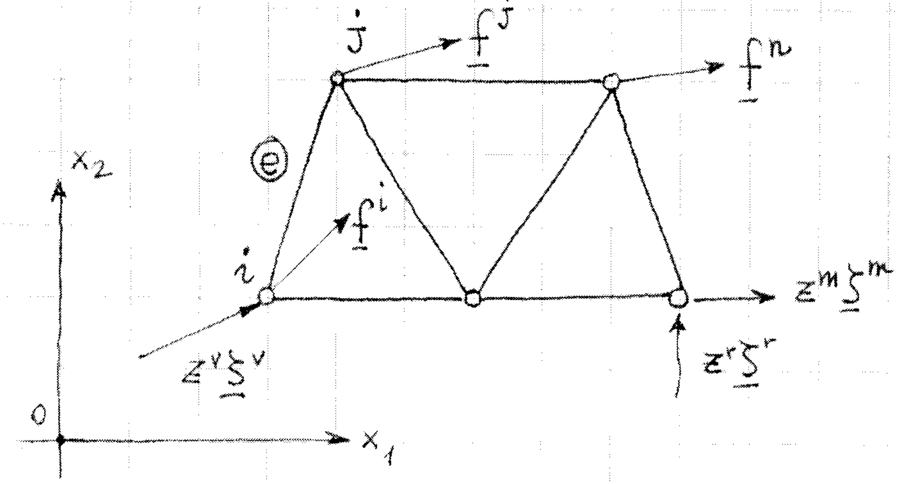
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \\ V_1^2 \\ V_2^2 \\ V_1^3 \\ V_2^3 \\ V_1^4 \\ V_2^4 \end{Bmatrix}}_{\underline{d}} = \underline{0}$$

Poiché $a+m = 5+3 = 2n$ e $\det \underline{A} \neq 0$ e quindi $\rho(\underline{A})=8$ la travatura è cinematicamente determinata.

La distribuzione delle aste e dei vincoli è tale da precludere atti di moto rigido $\underline{d} \neq \underline{0}$.

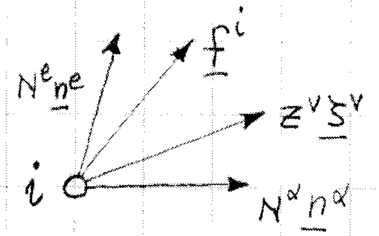
- ## Analisi statica

Come evidenziato le incognite statiche della travatura reticolare vincolata e soggetta a forze attive esterne sono costituite dalle m reazioni vincolari semplici e dagli a valori della forza normale nelle aste.



- Incognite: N^e, $e = 1, a$, z^v, $v = 1, m$
- Equazioni di equilibrio dei nodi

<u>nodo i</u>



$$\sum_e^{a_i} N^e \underline{n}^e + \sum_{1}^{m_i}{}_v\, z^v \underline{\zeta}^v + \underline{f}^i = \underline{0} \qquad (10.5)$$

con $\begin{cases} a_i = \text{aste che convergono sul nodo } i \\ m_i = \text{vincoli semplici attivi sul nodo } i \end{cases}$

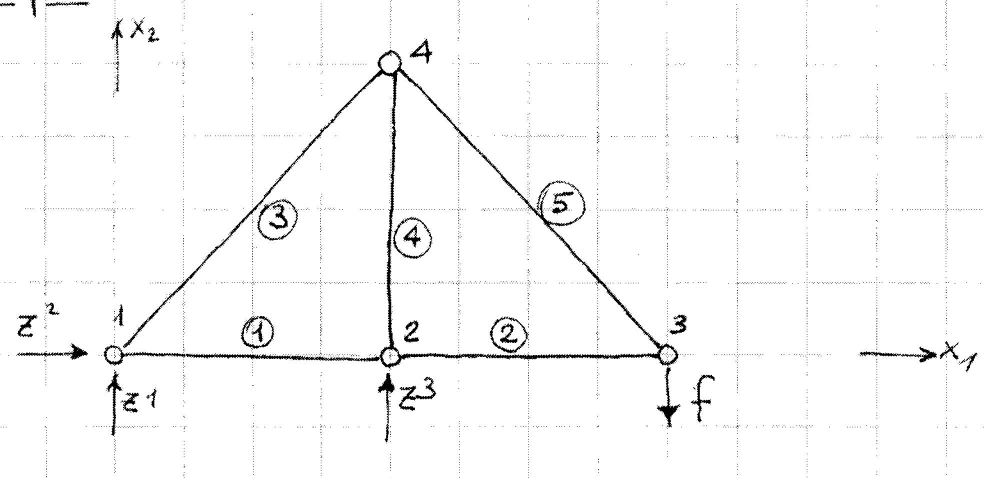
Sviluppando per componenti rispetto a (x_1, x_2) si ottengono due equazioni algebriche lineari per ogni nodo.

$$\begin{cases} \sum_e^{a_i} N^e \cos\theta_e + \sum_{1}^{m_i}{}_v\, z^v \zeta_1^v + f_1^i = 0 \\ \sum_e^{a_i} N^e \sin\theta_e + \sum^{m}{}_v\, z^v \zeta_2^v + f_2^i = 0 \end{cases} , \quad i = 1, n \qquad (10.6)$$

Si ottiene così un sistema di $2n$ equazioni lineari nelle $a+m$ incognite di forza normale nelle aste e reazione vincolare semplice; anche per questo caso la discussione viene svolta in analogia agli altri problemi statici trattati.
Condizione necessaria affinché il problema dell'equilibrio ammetta soluzione è che il numero delle incognite sia maggiore o uguale al numero delle equazioni: $a+m \geq 2n$.

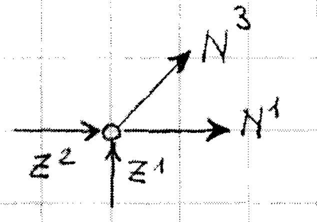
Nella rappresentazione dei risultati, le aste tese dette tiranti ($N>0$) vengono tracciate in linea sottile mentre quelle compresse dette puntoni ($N<0$) in linea spessa.

Esempio



Equilibrio dei nodi

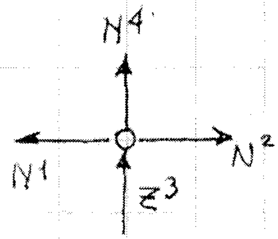
Nodo 1



$$\begin{cases} N^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N^3 + z^2 = 0 \\ N^3 \frac{\sqrt{2}}{2} + z^1 = 0 \end{cases}$$

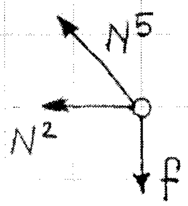
OSS N^e uscente dal nodo corrisponde alla condizione $N^e > 0$

__Nodo 2__



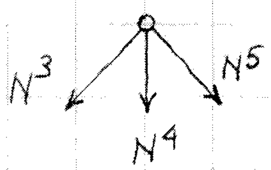
$$\begin{cases} -N^1 + N^2 = 0 \\ N^4 + z^3 = 0 \end{cases}$$

__Nodo 3__



$$\begin{cases} -N^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} N^5 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} N^5 - f = 0 \end{cases}$$

__Nodo 4__



$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} N^5 - \frac{\sqrt{2}}{2} N^3 = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} N^3 - N^4 - \frac{\sqrt{2}}{2} N^5 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni così ottenute possono essere poste in forma matriciale

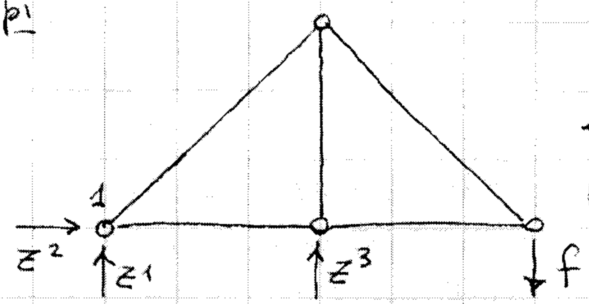
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} N^1 \\ N^2 \\ N^3 \\ N^4 \\ N^5 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix}}_{\underline{z}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Si può osservare che $\underline{B} = \underline{A}^T$ (si veda l'analisi cinematica dello stesso sistema). Poiché $\rho(\underline{B}) = 8$ la travatura risulta staticamente determinata per ogni condizione di carico, ovvero __isostatica__

E' opportuno osservare che la soluzione del sistema lineare così formulato può risultare complessa per l'elevato numero di incognite della travatura reticolare isostatica.

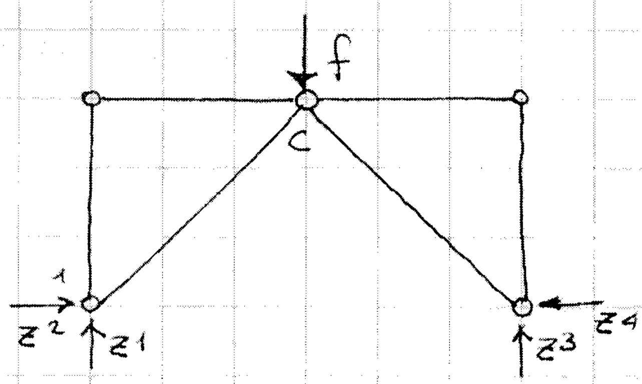
In genere è possibile determinare a priori le reazioni vincolari sulla base delle equazioni di equilibrio complessivo e delle eventuali equazioni ausiliarie.

Esempi



$$\begin{cases} z^2 = 0 \\ z^1 + z^3 - f = 0 \\ 1)\quad z^3 \ell - 2\ell f = 0 \end{cases}$$

$$z^1 = -f,\ z^2 = 0,\ z^3 = 2f$$



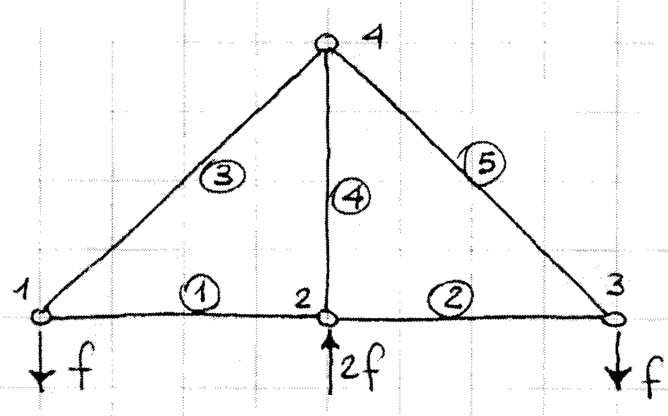
$$\begin{cases} z^1 + z^3 = 0 \\ z^2 - z^4 = 0 \\ 1)\quad 2z^3 \ell - f\ell = 0 \\ M_c = z^3 \ell - z^4 \ell = 0 \end{cases}$$

$$z^1 = z^3 = f/2;\ z^2 = z^4 = f/2$$

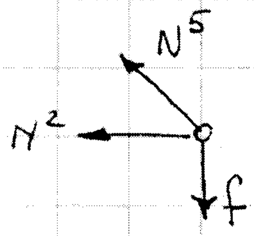
Quindi si può procedere alla scrittura delle equazioni di equilibrio dei nodi necessarie alla determinazione delle forze normali delle aste.

In diverse geometrie di travature è possibile risolvere lo stato di sollecitazione operando per nodi successivi. Tale procedimento richiede di individuare un <u>nodo semplice</u>, definito come nodo in cui convergono due aste, e di risolverlo mediante le due equazioni di equilibrio del nodo. Quindi eliminare dalla travatura le due aste risolte applicando ai nodi su cui convergono le forze da esse esercitate; individuare un successivo nodo semplice e risolverlo; ripetere la procedura sino al completamento della soluzione. Travature reticolari risolubili secondo tale procedimento prendono il nome di <u>travature a nodi canonici</u>.

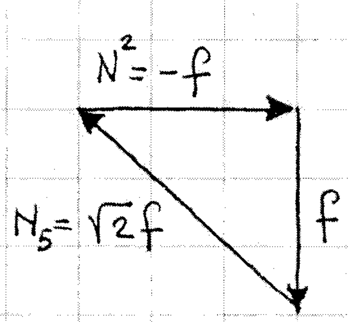
<u>Esempio</u>



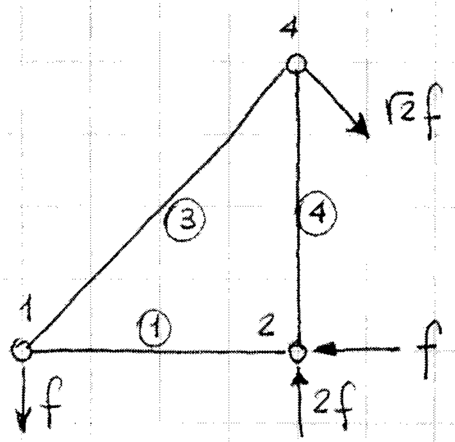
<u>Nodo 3 semplice</u>



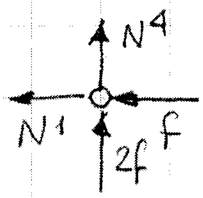
$$\begin{cases} -N^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} N^5 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} N^5 - f = 0 \end{cases}$$



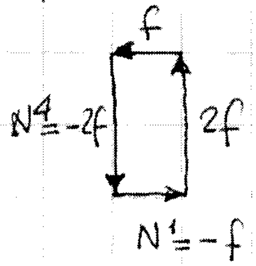
$\rightarrow N^5 = \sqrt{2} f \; ; \; N^2 = -f$



Nodo 2 semplice

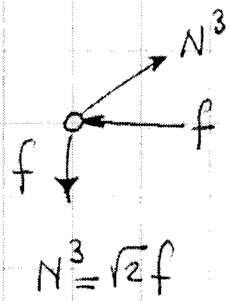


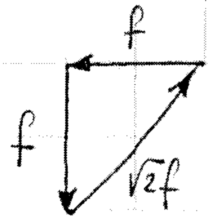
$$\begin{cases} N^1 = -f \\ N^4 = -2f \end{cases}$$



Nodo 1 Semplice

$$\begin{cases} N^3 \frac{\sqrt{2}}{2} - f = 0 \\ N^3 \frac{\sqrt{2}}{2} - f = 0 \end{cases}$$

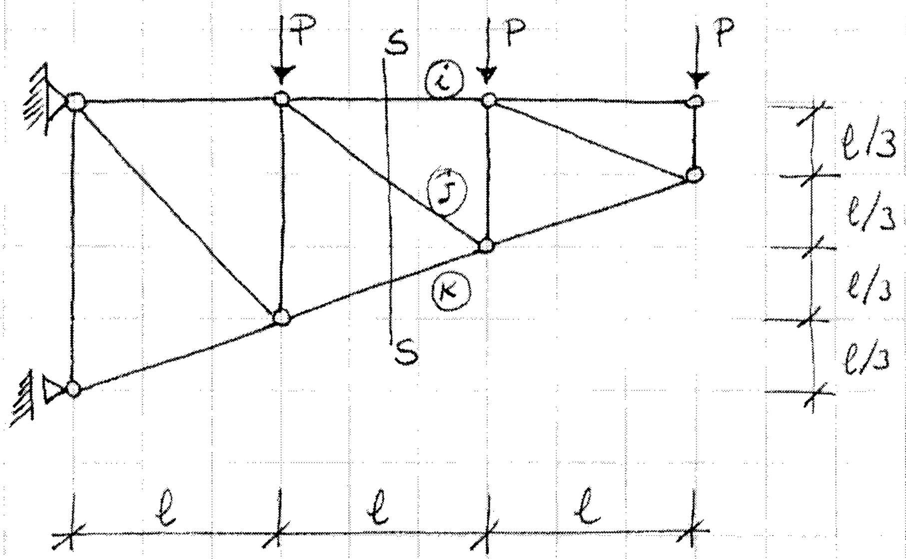




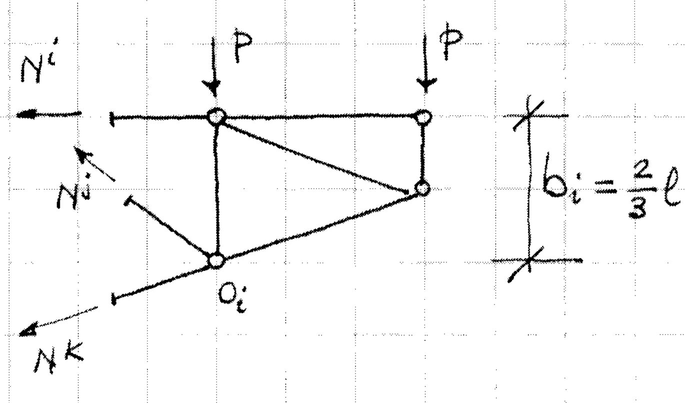
$N_3 = -\sqrt{2} f$

In diverse situazioni può non essere necessario determinare la forza normale in tutte le aste, ma solo in alcune; a tale scopo e per determinate geometrie della travatura è possibile valutare la sollecitazione mediante semplici operazioni di equilibrio alla rotazione di porzioni della travatura. Ciò è consentito quando le aste interessate possono essere sezionate da una sezione canonica. Questa è tale se divide la travatura reticolare in due parti sezionando tre aste non concorrenti nello stesso punto. Una travatura in cui tutte le aste possono essere interessate da sezioni canoniche è detta travatura a nodi canonici.

Si consideri la travatura in figura



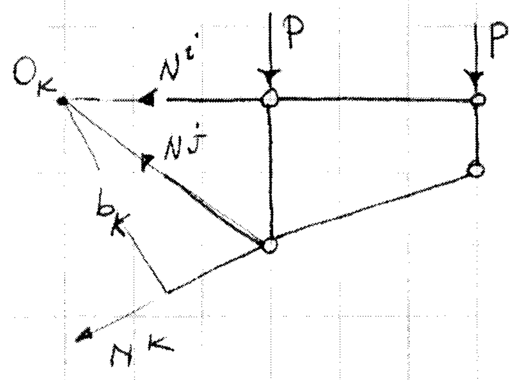
Si valuta la forza normale nelle aste i, j e K osservando che queste sono attraversate dalla sezione canonica S. Infatti i, j e K non sono tutte convergenti in uno stesso punto. La sezione divide la travatura in due parti. Si consideri la parte di destra che può essere isolata purché si applichino le forze interne nella sezione.



Ponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto al polo O_i, dove convergono le aste N^j e N^K, si ottiene una equazione nella sola incognita N^i

$$N^i b_i + m^e(O_i) = N^i \cdot \frac{2}{3} l - Pl = 0 ,$$

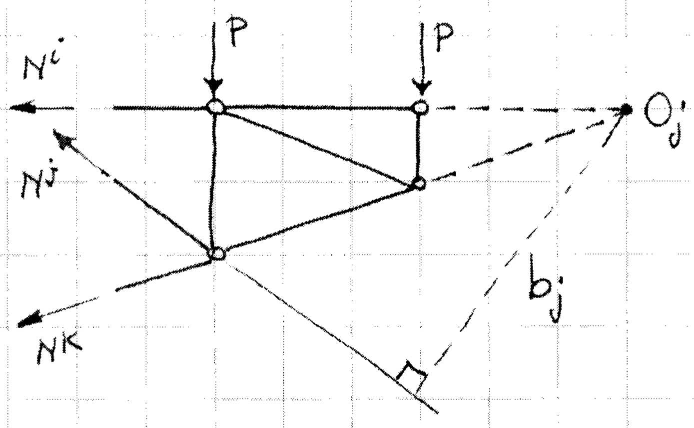
dove si è posto $m^e(O_i)$ momento risultante rispetto a O_i delle forze esterne, da cui $N^i = \frac{3}{2} P$.



Ponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto al polo O_K dove convergono l'asta i e l'asta j si ottiene

$$-N^K b_K + m^e(O_K) = 0$$

che fornisce l'incognita N^K.
Infine la forza normale N^j viene determinata ponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto al polo O_j dove convergono le rette d'azione



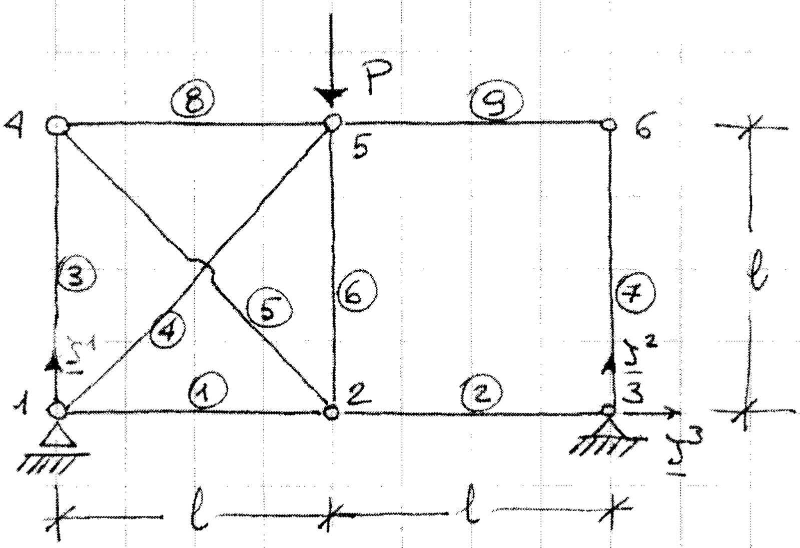
delle forze N^i e N^K, fornendo l'equazione

$$-N^j b_j + m^e(O_j) = 0.$$

Nel caso in cui le rette d'azione non siano convergenti e quindi parallele, l'equazione di equilibrio alla rotazione degenera nell'equilibrio alla traslazione, essendo il polo O_j all'infinito.

Esempi

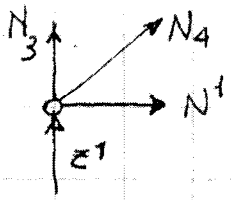
(1)



$a = 9$, $n = 6$, $m = 3$ $\longrightarrow$ $a + m = 12 = 2n$ la condizione necessaria per l'equilibrio è soddisfatta

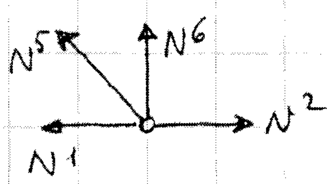
- Equilibrio dei nodi

Nodo 1



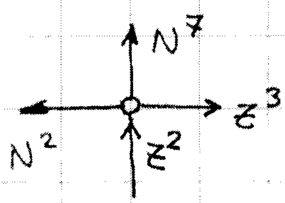
$$\begin{cases} N^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 = 0 \\ N^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 + z^1 = 0 \end{cases}$$

Nodo 2



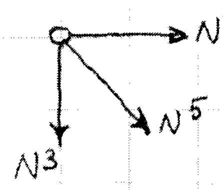
$$\begin{cases} -N^1 + N^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} N^5 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} N^5 + N^6 = 0 \end{cases}$$

Nodo 3



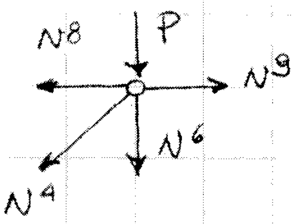
$$\begin{cases} -N^2 + z^3 = 0 \\ N^7 + z^2 = 0 \end{cases}$$

Nodo 4



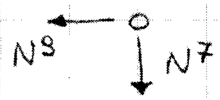
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} N^5 + N^8 = 0 \\ -N^5 \frac{\sqrt{2}}{2} - N^3 = 0 \end{cases}$$

Nodo 5



$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} N^4 - N^8 + N^9 = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} N^4 - N^6 - P = 0 \end{cases}$$

Nodo 6



$$\begin{cases} -N^9 = 0 \\ -N^7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ 5 \\ \\ 6 \\ \\ \end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{ccccccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{\underline{B}}
\begin{Bmatrix} N^1 \\ N^2 \\ N^3 \\ N^4 \\ N^5 \\ N^6 \\ N^7 \\ N^8 \\ N^9 \\ Z^1 \\ Z^2 \\ Z^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

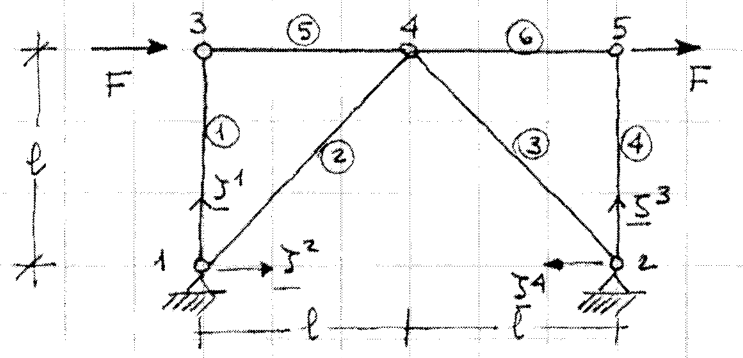
$\det \underline{B} = 0 \Rightarrow \rho(\underline{B}) < 12 \Rightarrow$ Sistema staticamente impossibile ovvero labile.

Tale situazione può essere verificata più generalmente osservando che la seconda equazione di equilibrio del nodo 6 forze $N^7=0$ che sostituite nella seconda del nodo 3 diviene $z^2=0$. Ciò significa che la reazione vincolare in 3 è nulla, in contraddizione con l'equazione di equilibrio alla rotazione della travatura rispetto al polo 1 che forze

$$z^2 \cdot 2l - Pl = 0.$$

Pertanto l'equilibrio è impossibile.

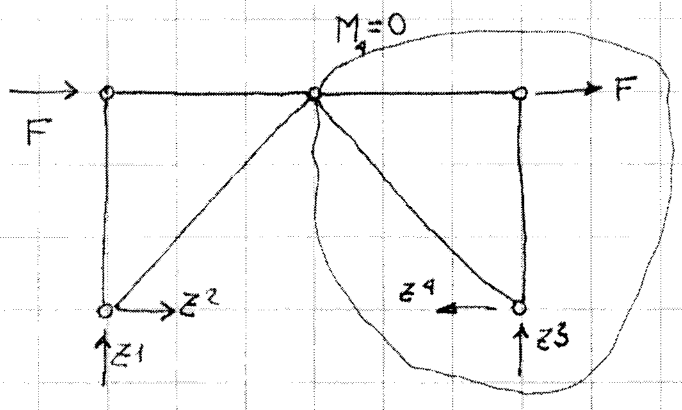
(2)



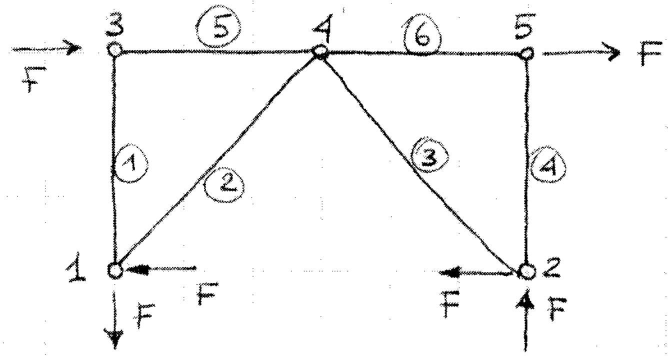
$n=5;\ m=4;\ a=6$

$2n = 10 = m+a$

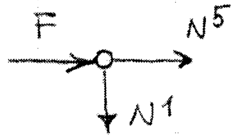
. Le reazioni vincolari possono essere determinate mediante tre equazioni di equilibrio complessivo e una equazione ausiliaria associata alla cerniera 4.



$$1)\ \begin{cases} z^2 - z^4 + 2F = 0 \\ z^1 + z^3 = 0 \\ z^3 \cdot 2l - 2Fl = 0 \\ M_4=0:\ z^3 l - z^4 l = 0 \end{cases} \Rightarrow z^1 = -F\ ;\ z^2 = -F\ ;\ z^3 = F\ ;\ z^4 = F$$

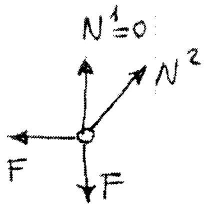


Nodo 3 semplice



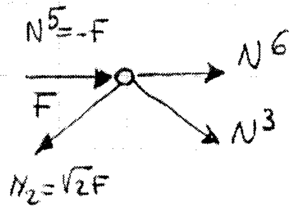
$$\begin{cases} N^5+F=0 \rightarrow N^5=-F \\ N^1=0 \end{cases}$$

Nodo 1 semplice



$$\begin{cases} N^2\frac{\sqrt{2}}{2}-F=0 \\ N^2\frac{\sqrt{2}}{2}-F=0 \end{cases} \longrightarrow N^2=\sqrt{2}F$$

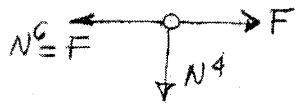
Nodo 4 semplice



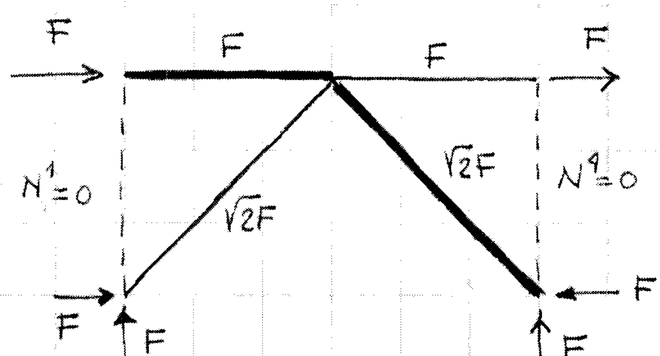
$$\begin{cases} N^3\frac{\sqrt{2}}{2}+N^6+F-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}F=0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}N^3-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}F=0 \rightarrow N^3=-\sqrt{2}F \end{cases}$$

$$N^6=F$$

Nodo 5 semplice

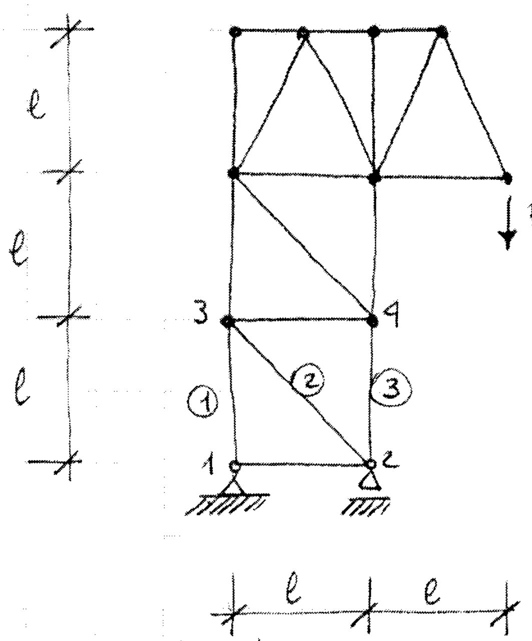


$$N^4=0$$



aste	N^e
1	0
2	$\sqrt{2}F$
3	$-\sqrt{2}F$
4	0
5	$-F$
6	F

(3)



- Determinare le forze normali nelle aste 1, 2 e 3.

$n = 11$

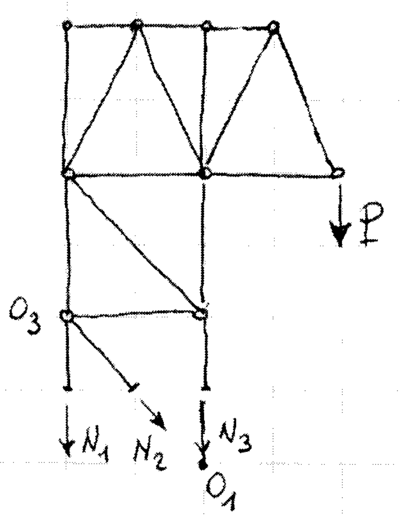
$a = 19$

$m = 3$

$2n = 22 = a + m$

OSS. Si dimostra che travature reticolari composte da maglie triangolari △, la condizione $2n = m + a$ è necessaria e sufficiente per l'esistenza della soluzione del problema statico $\Longrightarrow$ condizione nec. e suff. per l'isostaticità

Si opera una sezione canonica che taglia le aste 1, 2, 3 non convergenti in un unico nodo.



Equilibrio alla rotazione O_1

$$N_1 l - Pl = 0 \rightarrow N_1 = P$$

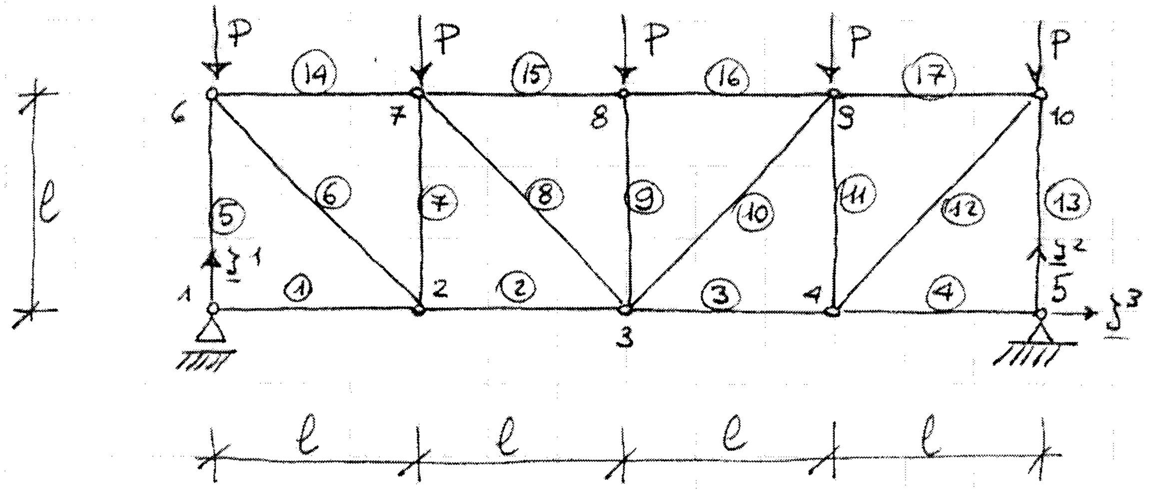
Equilibrio alla rotazione O_3

$$-N_3 l - P \cdot 2l = 0 \rightarrow N_3 = -2P$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale

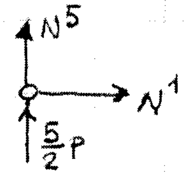
$$N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow N_2 = 0$$

(4)



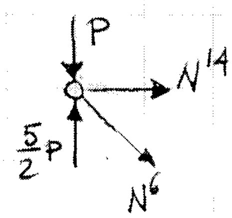
$n = 10;\ m = 3;\ a = 17 \rightarrow 2n = 10 = m + a$. La travatura è composta da maglie triangolari e quindi <u>isostatica</u>.
L'equilibrio globale fornisce le reazioni vincolari $z^1 = z^2 = \frac{5P}{2};\ z^3 = 0$.
La travatura è simmetrica rispetto alla retta verticale passante per i nodi 3 e 8; anche le forze applicate sono simmetriche. I valori delle forze normali nelle aste sono quindi simmetrici.
E' sufficiente analizzare l'equilibrio di un numero ridotto di nodi.

<u>Nodo 1 semplice</u>



$$\begin{cases} N^1 = 0 \\ N^5 + \frac{5}{2}P = 0 \rightarrow N^5 = -\frac{5}{2}P \end{cases}$$

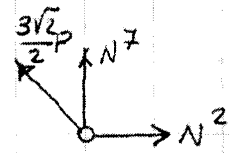
<u>Nodo 6 semplice</u>



$$\begin{cases} N^{14} + \frac{\sqrt{2}}{2} N^6 = 0 \\ -N^6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{2}P - P = 0 \end{cases}$$

$$N^6 = \frac{3\sqrt{2}}{2} P,\quad N^{14} = -\frac{3}{2}P$$

<u>Nodo 2 semplice</u>



$$\begin{cases} N^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} P = 0 \\ N^7 + \frac{3\sqrt{2}}{2} P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$N^2 = +\frac{3}{2}P;\quad N^7 = -\frac{3}{2}P$$